المحاضرة الخامسة :

الاثنين 9 / 4 / 2018م.

نقول عن الرأسين u, v أنهما متجاوران إذا كانت الثنائية $e = (u, v) \in A(D)$

أي قوس موجه يصل بين الرأسين.

• $(u, v) \neq (v, u)$ في البيان الموجه

ونقول أن القوس e بداية الرأس u وينتهي في الرأس v وأن الرأسين u, v يقعان على القوس e.

الدرجة الداخلية والدرجة الخارجية للرأس v :

• الدرجة الخارجية للرأس v : تمثل عدد الأضلاع الموجهة الخارجة من الرأس v ، ونرمز لها بالرمز:

$\rho^+(v)$ أو $od(v)$ بالإضافة للعروات الموجهة ونحسبها = 2

• الدرجة الداخلية للرأس v: هو عدد الأضلاع الموجهة الداخلة للرأس v ونرمز له بالرمز: بالإضافة للعروات الموجهة = 2

$\rho^-(v)$ أو $id(v)$

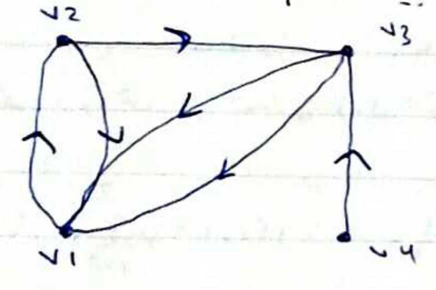
• درجة الرأس v هو مجموع الدرجتين الداخلية والخارجية أي:

$$\rho(v) = \rho^+(v) + \rho^-(v)$$

أو

$$deg(v) = od(v) + id(v)$$

مثال: لديك البيان G المجاور:



• $od(v_1) = 1$, $id(v_1) = 3$

$\Rightarrow deg(v_1) = 4$

• $od(v_2) = 2$, $id(v_2) = 1$

$\Rightarrow deg(v_2) = 3$

• $od(v_3) = 2$, $id(v_3) = 2$

$\Rightarrow deg(v_3) = 4$

• $od(v_4) = 1$, $id(v_4) = 0$

$\Rightarrow deg(v_4) = 1$

في البيان الموجه مجموع عدد الرؤوس = ضعف عدد الأضلاع

مبرهنة:

لتكن $D(V,A)$ بيان موجه رتبته p وحجمه q

فإن:

$$\sum_{i=1}^{p} \rho^{+}(v) = \sum_{i=1}^{p} \rho^{-}(v) = q$$ عدد الأضلاع

في المثال السابق:

$$6 = 6 = 6$$

البيانات الايزومورفيان (المتماثلات):

- نقول عن البيانين الموجهين D_1, D_2 إنهما ايزومورفيان (متماثلان) إذا وجد تقابل ϕ من مجموعة إلى واحد (متباين وغامر) من $V(D_1)$ إلى $V(D_2)$ يحافظ على التجاور أي إذا كان $u,v \in V(D_1)$ يتحقق ما يلي:

$$uv \in A(D_1) \Rightarrow \phi(u)\phi(v) \in A(D_2)$$

• البيان الموجه البسيط:

هو بيان موجه لا يحتوي على عروات موجهة ولا يحتوي على ضلعين موجهين من رأس إلى آخر بنفس الاتجاه.

مثال:

بسبب وجود ضلع داخل وضلع خارج لذا غير متماثلين

عدد الرؤوس الداخلة = الخارجة

لا تتطابق الرؤوس ومختلفة بالاتجاه لذا البيانين غير متماثلين.

• البيان الموجه المتناظر:

لتكن البيان الموجه $D(V,A)$ رتبته p وحجمه q

نقول عن البيان الموجه D انه متناظر اذا كان

$$(u,v) \in A(D) \Rightarrow (v,u) \in A(D)$$ قوس

- ويكون البيان الموجه دوري اذا كان يصل بين كل رأسين قوس واحد فقط. (باتجاه واحد فقط وليس الاثنين معاً)

- لتكن لدينا البيان الموجه $D(V,A)$ متى سمي البيان الموجه $q = p(p-1)$ عدد الأضلاع

البيان موجه متناظر تام اذا كان لأجل كل رأس $v \in V(D)$ يكون $od(v) = id(v) = p-1$

- ويكون البيان الموجه D منتظم من الدرجة r اذا كان لأجل كل رأس $v \in V(D)$ يكون

$$od(v) = id(v) = r$$

مثال: ونرمز له بالرمز D_r

$$od(v) = id(v) = 1$$

D_1

مثال:

بيان موجه منتظم من الدرجة $r=2$

D_2

• المصفوفات والبيان الموجه:

المسار: رؤوس بداية v_i ونهاية الرأس v_i نفسه

[1] مصفوفة التجاور:

ليكن البيان الآتي:

4 رؤوس
5 أضلاع موجهة

- مصفوفة التجاور هي مصفوفة مربعة من الدرجة $p \times p$ معرفة بالشكل

$$A_1(D) = [a_{ij}] = \begin{cases} 1 ; & v_i v_j \in A_1(D) \text{ (اذا كان بين الرأسين قوس)} \\ 0 ; & v_i v_j \notin A_1(D) \end{cases}$$

حسب الرسم

$A_1(D) =$

	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	0	0	1
v_2	1	0	0	0
v_3	1	1	0	0
v_4	0	1	0	0

(v_1, v_4)

[2] مصفوفة التقاطع:

هي مصفوفة مستطيلة فيها $p \times q$ وتعطى بالشكل

$$B_1(D) = [b_{ij}] = \begin{cases} 1 ; & \text{الرأس } v_i \text{ بداية للقوس } e_j \\ -1 ; & \text{الرأس } v_i \text{ نهاية للقوس } e_j \\ 0 ; & \text{عندما لا يقع القوس } e_j \text{ على الرأس } v_i \end{cases}$$

في المثال السابق:

$B_1(D) =$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
v_1	-1	-1	1	0	0
v_2	1	0	0	-1	-1
v_3	0	1	0	1	0
v_4	0	0	-1	0	1

[3] مصفوفة الوصول:

هي مصفوفة مربعة فيها $p \times p$ وتعطى بالشكل:

$$R_1(D) = [r_{ij}] = \begin{cases} 1 ; & \text{اذا كان يوجد مسار من الرأس } v_i \text{ الى الرأس } v_j \\ 0 ; & \text{اذا كان لا يوجد مسار من الرأس } v_i \text{ الى } v_j \end{cases}$$

في المثال السابق

المسار حسب الرسم تنطلق من v_i وصولا الى v_j حسب الرسم

$R_1(D) =$

	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	1	1	0	1
v_2	1	1	0	1
v_3	1	1	0	1
v_4	1	1	0	1

- مقلوب البيان الموجه:

ليكن البيان الموجه $D(V, A)$ مجموعة أضلاعه

$A(D) = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$

نستبدل كل ضلع برأس فنحصل على مجموعة الرؤوس

$V(D) = \{v_1, v_2, \dots, v_q\}$

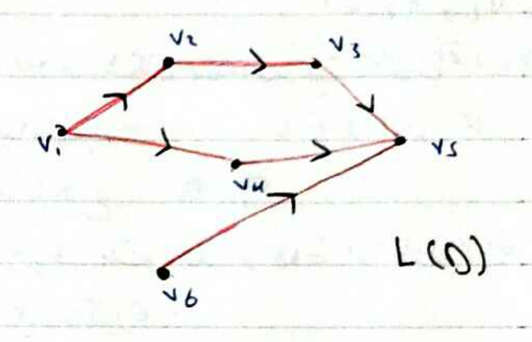
/ /

والتي هي رؤوس لبيان جديد H ويسمى مستقول البيان الموجه $D(V, A)$ ويكون $e_i e_j \in A(L(D))$ أي ينتمي للمستقول إذا كان:

$e_i \in A(D)$, $e_j \in A(D)$

مثال: لدينا البيان الموجه D.

للحصول على المستقول نستبدل كل ضلع برأس



المسارات والترابط:

• يواجه الواضح الكثير من المشاكل التي تواجه دفعنا في وسائل النقل من سيارة، باص، ... الخ. لذلك هدفنا دائمًا هو اختيار أقصر الطرق للوصول إلى المكان المحدد. فعندما ننطلق من المنزل إلى الجامعة نمر بعدة مواقف أو محطة تسمى عقدة (رأس vertix) وبين المحطة والمحطة يوجد خط مستقيم أو خط منحني يقطع وتسمى بالضلع لذلك هذه الرحلة اليومية من المنزل إلى الجامعة تشكل ما يسمى بالبيان والمكون من رؤوس وأضلاع والذي نطلق عليه اسم المسار (رؤوس بيانية)

هدفنا دائمًا هو البحث عن أقصر المسارات للوصول إلى المكان المحدد.

المسارات والحلقات:

• لتكن لدينا البيان $G(V,E)$ رتبته p وسعته q. مجموعة رؤوسه $V(G)=\{v_1,v_2,...v_p\}$ ومجموعة أضلاعه $E(G)=\{e_1,e_2,...e_q\}$ ولتكن $u,v \in V(G)$ أي u,v رأسين في البيان

نسمي $W = u \overset{\text{خطوة}}{-} v$ مسلك (walk) من الرأس u إلى الرأس v إذا كان W متتالية متناوبة من الرؤوس والأضلاع (تبدأ وتنتهي برأس).

والتي تعطى بالشكل الآتي: (تبدأ برأس)

$$W = u = v_0, e_0, v_1, e_1, v_2, e_2, ... v_{k-1}, e_{k-1}, v_k = v$$ (تنتهي برأس)

نسمي $u=v_0$ رأس بداية المسلك.

ونسمي $v=v_k$ رأس نهاية المسلك.

حيث الضلع يبدأ برأس سابق وينتهي برأس لاحق أي $e_i = v_i v_{i+1}$

k: تمثل عدد الأضلاع وهو طول المسلك.

إذا كان $k=0$ نحصل على مسلك مكون من رأس واحد ويسمى بالمسلك التافه.

• في المسلك يكون كل ضلعين متتاليين متجاورين والعكس غير صحيح، أي إذا كانت لدينا متتالية من الأضلاع يمكن أن لا تشكل مسلكًا.

ملاحظة: يمكن في المسلك الاستغناء عن الرؤوس وكتابة الأضلاع فقط.

مثال: ليكن لدينا البيان

لو كان لدينا المتتالية e_1, e_2, e_3, e_4 من الأضلاع
هذه المتتالية من الأضلاع لا تشكل مسلكاً.
لأنه لو كتبنا المسلك على شكل متتالية متناوبة من الرؤوس والأضلاع

$W = v_1, e_1, v_0, e_2, v_2, e_3$

لا يمكننا الوصول لأن e_3 لا تقع على الرأس v_2
لأن الضلع e_3 لا يقع على الرأس v_2

أما المتتالية $e_1, e_2, e_2, e_3, e_3, e_4$
تشكل مسلك في البيان لأنه عندما نكتبها على شكل متتالية متناوبة من الرؤوس والأضلاع

$v_1, e_1, v_0, e_2, v_2, e_2, v_0, e_3, v_3, e_3, v_0, e_4, v_4$

$= w = v_1 - v_4$

ملاحظة:
في المسلك يمكن أن تتكرر الرؤوس والأضلاع كما في المثال السابق.

- المسلكان المتساويان:

• ليكن

$U = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, \ldots e_{n-1}, v_n = V$

$U = u_0, e_1, u_1, e_2, u_2, e_3, \ldots e_{m-1}, u_m = V$

نقول عن مسلكين إنهما متساويين إذا كان
$n = m$ و $u_i = v_i$ (نفس الرؤوس ونفس الأضلاع)

• نقول عن المسلك W_1 محتوى في مسلك W_2 إذا كانت المتتالية المتناوبة W_1 متتالية جزئية من المتتالية W_2

مثال: ليكن لدينا البيان G ولنشكل المسلكين w_1, w_2

(G)

$w_1 = v_0 - v_1 = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_4, v_3, e_5, v_4, e_3, v_1$

$w_2 = v_0 - v_1 = v_0, e_1, v_1, e_3, v_4, e_5, v_3, e_4, v_2, e_2, v_1$

w_1, w_2 مسلكين مختلفين يشكلان نفس المسلك الذي بدايته الرأس v_0 ونهايته الرأس v_1
عدد الأضلاع $q = 5$

• نسمي المسلك w رحلة إذا كان لا يحتوي على أضلاع متكررة.
• نسمي المسلك w مسار إذا كان لا يحتوي على رؤوس متكررة.